Jurnal Karya Asli Lorekan Ahli Matematik Vol. 4 No.1 (2011) Page 01 - 12

Jurnal Karya Asli Lorekan Ahli Matematik

Pembuktian Alternatif Teorem Asas Pemadanan Momen Untuk Sistem Berdinamik Linear (The Alternative Proving of Moment Matching Basic Theorem for Linear Dynamical System)

[1]Farikhin dan [2]Ismail Bin Mohd

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pasti Alam,
Universitas Diponegoro, 50265, Semarang, Jawa Tengah, INDONESIA.
[2]Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi,
Universiti Malaysia Terengganu, 21030, Kuala Terengganu, Terengganu, MALAYSIA.
farikhin2@yahoo.com (atau farikhin@undip.ac.id) dan ismailmd@umt.edu.my

Abstrak : Dalam makalah ini, kita menyediakan satu pendekatan bermatematik yang membuktikan teorem pemadanan momen untuk sistem input ganda output ganda (IGOG). Seperti yang telah diketahui bahawa algoritma Arnoldi blok adalah satu pengitlakan algoritma Arnoldi. Algoritma Arnoldi blok boleh menjana satu asas bagi subruang Krylov blok. Selanjutnya, algoritma itu boleh menghasilkan satu persamaan yang dapat digunakan untuk membuktikan teorem asas pemadanan momen untuk sistem IGOG.

Abstract : In this paper, we provide a mathematical approach that proven theorem of moment matching for multi inputs multi outputs (MIMO) system. As well known that the block Arnoldi algorithm is a generalization of Arnoldi algorithm. The block Arnoldi algorithm can generate a basis of the block Krylov subspace. Furthermore, the algorithm can yield an equation which can be used to prove fundamental theorem of moment matching for MIMO system.

Kata Kunci: pemadanan momen, algoritma Arnoldi, sistem IGOG.

1. Pengenalan

Kaedah subruang Krylov memainkan peranan yang penting dalam penghampiran penyelesaian masalah berskala besar seperti sistem linear, masalah nilai-eigen, dan model penurunan ([2]). Sampai saat ini, wujud dua kaedah disebut algoritma Arnoldi dan algoritma Lanczos yang boleh digunakan untuk membina asas untuk subruang Krylov. Jika digunakan algoritma Arnoldi kepada subruang Krylov $K_m(A,b)$ dengan m integer positif, A matriks persegi dan b vector , kita memperoleh dua matriks iaitu V dan H dengan V sebagai matriks asas untuk $K_m(A,b)$ dan H pula disebut matriks Hessenberg yang penjelasan bagi keduanya akan diterangkan kemudian. Kedua-dua matriks ini akan memenuhi persamaan

$$\mathbf{AV} = \mathbf{VH} + h_{m+1}\mathbf{v}_{m+1}\mathbf{e}_m{}^T$$

dengan $\mathbf{e}_j = (0,...,0,1,0,...,0)^T \in R^m$ dan unsur 1 terletak pada kedudukan ke- j $(j = 1,...,m)$, $h_{m+1} \in R$, dan $v_{m+1} \in R^n$. Jika persamaan ini dilanggar, maka penghampiran yang terbina adalah salah ([5]).

Namun begitu, penerapan kaedah itu sendiri tidak mencukupi untuk subruang Krylov blok. Supaya algoritma Arnoldi boleh dikerjakan untuk pembinaan subruang Krylov blok, penghuraian QR ([6]) mesti disisipkan dalam algoritma itu. Selanjutnya, sifat dasar subruang Krylov masih berlaku pada subruang Krylov blok ([5], [9]). Dalam makalah ini, kita akan menyediakan suatu bentuk pembuktian bagi pemadanan momen seperti yang diberikan dalam Teorem 5.3.

Published by Pustaka Aman Press Sdn. Bhd.

2. Tatatanda

Untuk perbincangan selanjutnya, set nombor nyata dan kompleks masing-masing ditandai oleh R dan C. Matriks dan vektor, masing-masing ditandai oleh hurup besar dan kecil tebal seperti $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{b}$. Transposisi bagi matriks $\mathbf{A}$ ditandai dengan $\mathbf{A}^T$. Matriks identiti juga ditandai oleh $\mathbf{I}$ atau $\mathbf{I}_n$ dengan n adalah integer positif sebagai peringkatnya. Matriks sifar ditandai oleh Θ. Set matriks nyata bersaiz $m \times n$ ditandai oleh $\mathrm{R}^{m\times n}$.

3. Sistem Berdinamik Linear

Pertimbangkan sistem berdinamik linear yang boleh dihuraikan oleh

$$\begin{cases} \mathbf{E}\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

bersama dengan syarat awal $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \theta$, dengan $\mathbf{E} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, dan $\mathbf{C} \in \mathrm{R}^{q\times n}$ adalah matriks, $\mathbf{x} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ adalah pembolehubah keadaan, $\mathbf{u} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^p$ adalah fungsi input, dan $\mathbf{y} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^q$ adalah fungsi output. Untuk $p = q = 1$, sistem (3.1) disebut sistem **input tunggal output tunggal (ITOT).** Sistem (3.1) juga ditandai oleh $(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$.

Misalkan $\hat{\mathbf{x}}(s)$, $\hat{\mathbf{y}}(s)$, dan $\hat{\mathbf{u}}(s)$ masing-masing menandakan jelmaan Laplace bagi $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, dan $\mathbf{u}(t)$. Maka dengan mengambil jelmaan Laplace bagi (3.1), kita memperoleh

$$s\mathbf{E}\,\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{u}}(s), \tag{3.2}$$

dan

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}\,\hat{\mathbf{x}}(s). \tag{3.3}$$

Daripada (3.2) dan (3.3),

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(s) &= \mathbf{C}\left((s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,\hat{\mathbf{u}}(s)\right) \\ &= G(s)\,\hat{\mathbf{u}}(s) \end{aligned}$$

dengan

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{3.4}$$

untuk $s \in \mathrm{C}$. Persamaan (3.4) disebut **fungsi pindah** bagi sistem (3.1).

Misalkan wujud matriks songsang bagi $(\mathbf{I} - \mathbf{D})$ dengan norm bagi **D,** $\|\mathbf{D}\| < 1$, maka songsang bagi matriks itu boleh ditulis menggunakan siri matriks ([6])

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}^k. \tag{3.5}$$

Pilihlah satu titik $s = s_0 \in \mathrm{C}$ sehingga $(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ wujud. Jika matriks $\mathbf{D}$ digantikan dengan $(s_0 - s)(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}$ dalam (3.5), maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A}) - (s_0 - s)\mathbf{E}\right)^{-1}\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\right)^{-1}(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \\ &= \left(\mathbf{I} - (s_0 - s)(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\right)^{-1}(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} \right)^k (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} (s_0 - s)^k .$$

Jika fungsi pindah G dikembangkan pada titik $s = s_0$ sehingga $(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ wujud, maka

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}_k (s_0 - s)^k \tag{3.6}$$

dengan

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{C}\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} \right)^k (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{3.7}$$

disebut momen bagi $G(s)$.

Tugas utama model penurunan adalah untuk mencari satu sistem berbentuk sama seperti (3.1) dengan peringkat rendah yang menghampiri sistem asal. Secara persis, model penurunan peringkat yang hendak dicari itu adalah satu sistem berbentuk

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}} \dfrac{d\, \tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\, \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\, \mathbf{u}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\, \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

dengan $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathrm{R}^{r\times r}$, $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathrm{R}^{r\times p}$, $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathrm{R}^{q\times r}$, dan $r < n$.

Disebabkan perlu suatu perbincangan yang besar, maka model terturun tadi yang dibina dengan mengerjakan satu matriks unjuran kepada model asal akan ditakrifkan kemudian. Misalkan r adalah dimensi sistem peringkat terturun dan misalkan $\overline{\mathbf{W}}, \overline{\mathbf{V}} \in \mathrm{R}^{n\times r}$ dengan $\overline{\mathbf{W}}^T\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{I}_r \in \mathrm{R}^{r\times r}$ adalah dua matriks unjuran sehingga

$$rank(\overline{\mathbf{V}}) = rank(\overline{\mathbf{W}}) = r .$$

Maka, dengan membubuh

$$\tilde{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{W}}^T\mathbf{E}\overline{\mathbf{V}},\ \tilde{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{W}}^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{V}},\ \tilde{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{W}}^T\mathbf{B},\ \text{dan}\ \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\overline{\mathbf{V}} \tag{3.9}$$

sistem berdinamik linear (3.1) boleh diturunkan untuk memberikan satu sistem peringkat terturun yang ditakrifkan oleh (3.8) dengan perinciannya diberikan dalam [2], [3], [7], dan [10]. Mengikut gaya penulisan (3.1), sistem peringkat terturun (3.8) boleh ditandai dengan $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$. Fungsi pindah bagi sistem peringkat terturun ini ditakrifkan oleh

$$\tilde{G}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}} (s_0 - s)^k \tag{3.10}$$

dengan

$$\tilde{\mathbf{M}}_k = \tilde{\mathbf{C}}\left((s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \right)^k (s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \tag{3.11}$$

adalah momennya.

Model penurunan boleh dibina menggunakan subruang Krylov dan penghuraian nilai singular seperti diterangkan dalam [2]. Matlamat keluarga kaedah berdasarkan Krylov yang juga dikenal sebagai pemadanan momen, adalah untuk mencari sistem peringkat terturun yang beberapa momennya dipadankan dengan sistem asal. Matlamat utama pemadanan momen adalah untuk mencari k momen yang memadankan sistem asal $G(s)$ dengan sistem peringkat terturun $\tilde{G}(s)$, dinamakan

$$\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1} \tag{3.12}$$

untuk $k = 1,2,\cdots,m$.

Dalam sistem ITOT, kita mempunyai teorem yang berikut dengan pembuktiannya boleh ditemui dalam halaman 36 rujukan [4].

Teorem 3.1 ([4])

Jika $\mathbf{V} = K_m\left((\mathbf{A}-s_0\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E},(\mathbf{A}-s_0\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b}\right)$ dan $\mathbf{W} = K_m\left((\mathbf{A}-s_0\mathbf{E})^{-T}\mathbf{E}^T,(\mathbf{A}-s_0\mathbf{E})^{-T}\mathbf{c}\right)$, maka momen-momen bagi (3.7) dan (3.11) memenuhi

$$\mathbf{M}_k = \tilde{\mathbf{M}}_k$$

untuk $k = 1,2,,\cdots,2m$.♦

4. Subruang Krylov Blok

Menurut sistem berdinamik linear yang dihuraikan dalam Bahagian 3, sistem asal dan sistem peringkat terturun akan dipadankan oleh $2m$ momen untuk satu subruang Krylov tertentu. Dalam bahagian ini, kita akan membincangkan pemadanan yang melibatkan subruang Krylov dengan lebih umum. Seperti yang telah diketahui bahawa subruang $K_m(\mathbf{A},\mathbf{b})$ boleh dibina menggunakan matriks $\mathbf{A}$ dan vektor $\mathbf{b}$. Untuk satu sistem IGOG, subruang Krylov sepatutnya dibina menggunakan **dua matriks**.

Sekarang, kita meneliti subruang Krylov blok seperti yang berikut. Misalkan $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ dan $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{g}_p] \in \mathrm{R}^{n\times p}$. Subruang Krylov blok ditakrifkan oleh

$$K_m(\mathbf{F},\mathbf{G}) = ren\{\mathbf{F}^q\mathbf{g}_\mathbf{k} \mid q = 0,1,2,\cdots,m-1 \,\text{dan}\, k = 1,2,\cdots,p\}. \tag{4.1}$$

Wujud beberapa teknik untuk membina asas berortonorm untuk subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{A},\mathbf{B})$. Cara mudah ialah semua lajur dijana, dan diortogon selepasnya ([1] and [3]). Teknik ini mudah diterapkan, tetapi tidak cekap jika m bertambah. Teknik kedua, blok dalam subruang Krylov blok dilayani sebagai blok. Caranya, satu blok baru penuh dijana sekali, kemudian blok ini diortogonkan terhadap setiap blok yang wujud. Teknik ini disebut algoritma Arnoldi ([9]). Proses pengortogonan boleh dilakukan menggunakan penghuraian QR. Algoritma Arnoldi ditulis seperti yang berikut.

Algorithm 1 : Algoritma Arnoldi Blok

Data : $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, dan integer positif m

Output : $\overline{\mathbf{V}} \in \mathrm{R}^{n\times mp}$ dan $\overline{\mathbf{H}} \in \mathrm{R}^{mp\times mp}$.

1. Kira matriks berortogon $\mathbf{V}^1$ peringkat $n \times p$ menerusi pencarian penghuraian QR bagi $\mathbf{G}$, namakanlah $\mathbf{G} = \mathbf{V}^1\mathbf{R}$.

2. untuk $j = 1$ **hingga** $j = m$ **lakukan**

2.1. $\mathbf{\Gamma}^j = \mathbf{F}\,\mathbf{V}^j$

2.2. untuk $k = 1$ **ke** $k = j$ **lakukan**

2.2.1. $\overline{\mathbf{H}}^{k,j} = \mathbf{V}^{k^T}\,\mathbf{\Gamma}^j$

2.2.2. $\mathbf{\Gamma}^j = \mathbf{\Gamma}^j - \mathbf{V}^k\overline{\mathbf{H}}^{k,j}$

2.3. kira $\overline{\mathbf{V}}^{j+1}$ dan $\overline{\mathbf{H}}^{j+1,j}$ menerusi pencarian penghuraian QR bagi Γ^j dengan $\mathbf{\Gamma}^j = \overline{\mathbf{V}}^{j+1}\overline{\mathbf{H}}^{j+1,j}$.

3. Kembali.♦

Algoritma Arnoldi blok adalah satu pengitlakan algoritma Arnoldi. Mulai dengan mengira matriks berortogon $\mathbf{V}^1$, algoritma Arnoldi blok membina satu set matriks berortogon

$$\left\{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \cdots, \mathbf{V}^m \middle| \; \mathbf{V}^k \in \mathrm{R}^{n \times p}, k = 1,2,\cdots,m\right\}$$

sedemikian hingga jika

$$\overline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^1 & \mathbf{V}^2 & \cdots & \mathbf{V}^m \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{n \times mp},$$

maka

$$\overline{\mathbf{V}}^T \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{I}_{mp \times mp} \text{ dan } \overline{\mathbf{V}}^T \mathbf{F} \overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{H}}$$

dengan $\overline{\mathbf{H}}$ adalah satu matriks Hessenberg blok dan $\mathbf{F}$ adalah data. Output algoritma Arnoldi blok adalah dua matriks iaitu matriks Hessenberg blok $\overline{\mathbf{H}} \in \mathrm{R}^{mp \times mp}$ dan matriks asas $\overline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^1 & \mathbf{V}^2 & \cdots & \mathbf{V}^m \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{n \times mp}$ untuk subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Matriks Hessenberg blok mempunyai bentuk macam

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{1,2} & \mathbf{H}^{1,2} & \mathbf{H}^{1,3} & \mathbf{H}^{1,4} & \cdots\cdots & \mathbf{H}^{1,m-1} & \mathbf{H}^{1,m} \\ \mathbf{H}^{2,1} & \mathbf{H}^{2,2} & \mathbf{H}^{2,3} & \mathbf{H}^{2,4} & \cdots\cdots & \mathbf{H}^{2,m-1} & \mathbf{H}^{2,m} \\ \Theta & \mathbf{H}^{3,2} & \mathbf{H}^{3,3} & \mathbf{H}^{3,4} & \cdots\cdots & \mathbf{H}^{3,m-1} & \mathbf{H}^{3,m} \\ \Theta & \Theta & \mathbf{H}^{4,3} & \mathbf{H}^{4,4} & \cdots\cdots & \mathbf{H}^{4,m-1} & \mathbf{H}^{4,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & \ddots & \mathbf{H}^{m-1,m-1} & \mathbf{H}^{m-1,m} \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & \cdots & \mathbf{H}^{m.m-1} & \mathbf{H}^{m,m} \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{mp \times mp}$$

dengan

$$\mathbf{H}^{k,j} = \begin{cases} \mathbf{V}^{k^T} \mathbf{F} \, \mathbf{V}^j & (j = 1,2,\cdots,m-1; k = 1,2,\cdots,j+1) \\ \mathbf{V}^{k^T} \mathbf{F} \, \mathbf{V}^m & (k = 1,2,\cdots,m) \\ \Theta & (\text{selainnya}) \end{cases}.$$

Dalam [5], Heres telah mengemukakan suatu cadangan algoritma Arnoldi blok terubahsuai dengan cara menggantikan penghuraian QR dengan penghuraian QR pangkat terdedah (kecil atau sama dengan yang digantikan).

Berpandukan kepada Algoritma 1 dan pengiraan di atas, kita dapat mengemukakan satu teorem seperti yang berikut.

Teorem 4.1 ([5] dan [9])

Jika (a) $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n \times n}$, (b) $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n \times p}$, dan (c) $\overline{\mathbf{V}}$ dan $\overline{\mathbf{H}}$ adalah dua matriks yang boleh dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok yang tidak berhenti sebelum langkah ke-m, maka

$$\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}} + \mathbf{V}^{m+1}\,\overline{\mathbf{H}}^{m+1,m}\,\mathbf{E}_p^{\,T}. \tag{4.2}$$

dengan $\mathbf{E}_p$ adalah p lajur terakhir bagi $\mathbf{I}_{mp \times mp}$.♦

5. Teorem Pemadanan Momen

Dalam bahagian ini, kita akan mengemukakan satu teorem asas bagi pemadanan momen untuk sistem IGOG dengan bantuan persamaan (4.2) dan dua teorem yang berikut.

Teorem 5.1

Jika (a) $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, (b) $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, dan (c) $\overline{\mathbf{V}}$ dan $\overline{\mathbf{H}}$ adalah dua matriks yang boleh dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ yang tidak berhenti sebelum lelaran ke-m, maka

$$\mathbf{F}^{k-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1 \tag{5.1}$$

dengan $\mathbf{E_1}$ adalah p lajur pertama bagi $\mathbf{I}_{mp\times mp}$ dan untuk $k = 1,2,\cdots,m$.

Bukti

Kebenaran teorem akan ditunjukkan dengan aruhan bermatematik. Jelas secara remeh, teorem adalah benar untuk $k = 1$. Jika kedua sisi persamaan (4.2) didharab dengan $\mathbf{E_1}$, diperoleh

$$\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\,\mathbf{E}_1$$

yang jelas sama dengan (5.1) untuk $k = 2$. Jadi, (5.1) sah untuk $k = 2$.

Sekarang, misalkan (5.1) sah untuk k, ertinya dapat ditulis

$$\mathbf{F}^{k-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1.$$

Kita akan buktikan bahawa (5.1) adalah sah untuk $k+1$ dengan maksud bahawa $\mathbf{F}^{k}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1$. Sesungguhnya

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{k}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 &= \mathbf{F}\left(\mathbf{F}^{k-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1\right)\\ &= \mathbf{F}\left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\ &= \left(\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Gantikan persamaan (4.2) ke dalam (5.2), diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{k}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 &= \left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}} + \mathbf{V}_{m+1}\left(\mathbf{V}_{m+1}^{T}\mathbf{F}\mathbf{V}_m\right)\mathbf{E}_P{}^{T}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\ &= \left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\ &= \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1\end{aligned}$$

Dengan demikian, teorem adalah sah untuk $k = 1,2,\cdots,m$. ♦

Kita mendapati bahawa persamaan $\mathbf{F}^{k}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1$ boleh dibuktikan dengan cara lain. Oleh kerana $\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\,\mathbf{E}_1$ boleh ditulis sebagai $\left(\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\right)\mathbf{E}_1 = \Theta$. Dari itu, $\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}$. Dengan demikian, menerusi penggantian $\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}}$ dengan $\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}$ ke dalam (5.2), kita mempunyai

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{k}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1 &= \left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\ &= \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1.\end{aligned}$$

Teorem 5.2

Jika (a) $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, (b) $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, (c) $\overline{\mathbf{V}}$ dan $\overline{\mathbf{H}}$ adalah dua matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ yang tidak berhenti sebelum lelaran ke-m, dan (d) $\overline{\mathbf{U}}^{T}\,\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$, maka

$$\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\,\mathbf{E}_1=\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1 \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{5.3}$$

dengan $\tilde{\mathbf{F}}=\overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$, dan $\mathbf{E_1}$ adalah p lajur pertama bagi $\mathbf{I}_{mp\times mp}$.

Bukti

Lagi sekali, aruhan bermatematik akan digunakan dalam pembuktian ini. Jelas teorem adalah benar untuk $k=1$. Gantikan k dengan 2 dalam persamaan (5.3) diperoleh

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}\,\mathbf{E}_1&=\left(\overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}\right)\mathbf{E}_1\\&=\overline{\mathbf{U}}^T\;\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\,\mathbf{E}_1\\&=\overline{\mathbf{H}}\,\mathbf{E}_1.\end{aligned}$$

Jadi, teorem adalah benar untuk $k=2$.

Sekarang, misalkan (5.3) benar untuk k, sehingga dapat ditulis

$$\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\,\mathbf{E}_1=\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan teorem benar untuk $k+1$. Menggunakan persamaan (5.3) kita memiliki

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}^{k}\mathbf{E}_1&=\tilde{\mathbf{F}}\left(\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\&=\left(\overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\&=\overline{\mathbf{U}}^T\left(\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\&=\overline{\mathbf{U}}^T\left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}+\mathbf{V}_{m+1}\left(\mathbf{V}_{m+1}^T\mathbf{F}\mathbf{V}_m\right)\mathbf{E}_p^T\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\&=\overline{\mathbf{U}}^T\left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\\&=\left(\overline{\mathbf{U}}^T\overline{\mathbf{V}}\;\right)\left(\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1\right)\\&=\mathbf{I}\left(\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1\right)\\&=\overline{\mathbf{H}}^{k}\mathbf{E}_1.\end{aligned}$$

yang jelas membuktikan kebenaran teorem ini.♦

Teorem yang berikut disebut **teorem asas bagi pemadanan momen** untuk sistem IGOG. Pembuktian telahpun diberikan dalam [4], tetapi untuk ITOT sahaja. Namun begitu, kita akan menyediakan **teorem asas pemadanan momen** untuk IGOG berdasarkan pada Teorem 5.1 dan Teorem 5.2.

Teorem 5.3

Jika (a) $\mathbf{F}\in\mathrm{R}^{n\times n}$, (b) $\mathbf{G}\in\mathrm{R}^{n\times p}$, (c) $\overline{\mathbf{V}}$ adalah satu matriks asas yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ yang tidak berhenti sebelum lelaran ke-m, dan (d) $\overline{\mathbf{U}}^T\;\overline{\mathbf{V}}=\mathbf{I}$, maka

$$\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{G}=\overline{\mathbf{V}}\,\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\,\tilde{\mathbf{G}} \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{5.4}$$

dengan $\tilde{\mathbf{F}}=\overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$ dan $\tilde{\mathbf{G}}=\overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{G}$.

Bukti

Lagi sekali keabsahan teorem dibukti secara aruhan bermatematik. Misalkan $\mathbf{V}^1$ adalah satu penghuraian QR bagi $\mathbf{G}$ dengan $\mathbf{G}=\mathbf{V}^1\mathbf{R}$. Jika $\mathbf{E_1}$ adalah p lajur pertama bagi $\mathbf{I}_{mp\times mp}$, maka

$$\mathbf{G}=\mathbf{V}^1\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{V}^1 & \mathbf{V}^2 & \cdots & \mathbf{V}^m\end{bmatrix}\mathbf{E}_1\mathbf{R}=\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1\mathbf{R}. \tag{5.5}$$

Dari itu, menerusi hipotesis (d), kita memiliki

$$\tilde{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{G} = \overline{\mathbf{U}}^T\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1\mathbf{R} = \mathbf{E}_1\mathbf{R}\ . \tag{5.6}$$

Persamaan (5.5) dan (5.6) dapat dimanfaatkan untuk memberikan

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1\mathbf{R} = \overline{\mathbf{V}}\,\tilde{\mathbf{G}}.$$

Jadi, teorem benar untuk $k = 1$.

Dengan menggunakan persamaan (5.5), (5.6), Teorem 5.1 dan Teorem 5.2, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{G} &= \left(\mathbf{F}^{k-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R}\\ &= \left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R}\\ &= \overline{\mathbf{V}}\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R}\\ &= \overline{\mathbf{V}}\left(\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R}\\ &= \overline{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\left(\mathbf{E}_1\mathbf{R}\right)\\ &= \overline{\mathbf{V}}\,\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\,\tilde{\mathbf{G}}\end{aligned}$$

untuk $k = 2,3,\cdots,m$. Oleh sebab itu, (6.4) benar untuk $k = 1,2,\cdots,m$. ♦

Teorem 5.4

Jika (a) $(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ adalah satu sistem IGOG dan $(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{C}})$ adalah sistem peringkat terturunnya, (b) $s = s_0$ adalah satu titik dalam C sedemikian hingga matriks $(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})$ dan $(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}})$ adalah taksingular, dan (c) $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{V}} = [\mathbf{V}_1\ \ \mathbf{V}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{V}_m]$ adalah satu matriks asas yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m\left((s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{E},(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right)$, maka momen (3.7) dan (3.11) pada titik $s = s_0$ memenuhi

$$\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1}$$

untuk $k = 1,2,\cdots,m$.

Bukti

Jika kita mengtakrifkan

$$\mathbf{F} = (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\,,$$

$$\mathbf{G} = (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,,$$

$$\overline{\mathbf{U}}^T = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{V}}^T(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A}),$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}},$$

dan

$$\tilde{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{G} = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\,,$$

maka

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}}\\ &= \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{V}}^T(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\overline{\mathbf{V}}\\ &= \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{V}}^T\mathbf{E}\overline{\mathbf{V}}\\ &= \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\,.\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}} &= \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{G}\\ &= \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{V}}^T(s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \overline{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}$$
$$= \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}},$$

dan

$$\overline{\mathbf{U}}^T \overline{\mathbf{V}} = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \overline{\mathbf{V}}^T (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})\overline{\mathbf{V}} = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right) = \mathbf{I}\ .$$

Dengan menggunakan Teorem 5.3, diperoleh

$$\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\right)^{k-1} (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \overline{\mathbf{V}}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\right)^{k-1} \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

untuk $k = 1,2,\cdots,m$. Dari itu

$$\mathbf{C}\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\right)^{k-1} (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \left(\mathbf{C}\overline{\mathbf{V}}\right)\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\right)^{k-1} \left(s_0\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

atau

$$\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1}$$

untuk $k = 1,2,\cdots,m$. Sempurnalah buktinya.♦

Liu et al. [8] telah menyiasat model penurunan untuk sistem dinamik yang mempunyai sifat tertentu. Mereka telah menyarankan satu kaedah untuk mencari sistem peringkat terturun untuk sistem dinamik simetri. Satu sistem berdinamik linear bagi $(\mathbf{I},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ dikatakan **simetri** jika dan hanya jika $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Teorem 5.5

Jika (a) $(\mathbf{I},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ adalah satu sistem IGOG dan $\left(\mathbf{I},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{C}}\right)$ sistem peringkat terturunnya adalah seperti dalam (3.8), (b) $s = s_0$ adalah satu titik dalam $\mathbb{C}$ sehingga matriks $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ dan $\left(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}\right)$ taksingular, dan (c) $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{V}} = [\mathbf{V}_1\ \ \mathbf{V}_2\ \ \cdots\ \mathbf{V}_m]$ adalah satu matriks asas yang boleh dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m\left((s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, (s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right)$, maka pada titik $s = s_0$ momen (3.7) dan (3.11) memenuhi

$$\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1}$$

untuk $k = 1,2,\cdots,2m$.

Bukti

Buktinya adalah serupa dengan bukti Teorem 5.4.♦

Berikut ini, perhatikan teorem yang lebih umum berbanding dengan Teorem 5.5.

Teorem 5.6

Jika (a) $(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ adalah satu sistem IGOG dan $\left(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{C}}\right)$ pula adalah sistem peringkat terturunnya, (b) $s = s_0$ adalah titik dalam $\mathbb{C}$ sehingga matriks $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ adalah taksingular, (c) $\overline{\mathbf{V}}$ adalah satu matriks asas yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}, (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right)$, dan (d) $\overline{\mathbf{W}}$ adalah satu matriks asas yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok $K_m\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{E}^T, (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}\right)$, maka pada titik $s = s_0$ momen (3.7) dan (3.11) memenuhi

$$\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1}$$

untuk $k = 1,2,\cdots,2m$.

Bukti

Seperti dalam Teorem 5.4, kita takrifkan

$$\mathbf{F}_1 = (s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{E},\ \mathbf{G}_1 = (s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\text{, dan } \overline{\mathbf{U}}_1^T = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{W}}^T(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}).$$

Jika $\tilde{\mathbf{F}}_1 = \overline{\mathbf{U}}_1^T\,\mathbf{F}_1\overline{\mathbf{V}}$ dan $\tilde{\mathbf{G}}_1 = \overline{\mathbf{U}}_1^T\mathbf{G}_\mathbf{1}$, maka

$$\tilde{\mathbf{F}}_1 = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}},\ \tilde{\mathbf{G}}_1 = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\text{, dan } \overline{\mathbf{U}}_1^T\,\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{I}\,.$$

Dengan menggunakan Teorem 5.3, kita memperoleh

$$\left((s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\right)^{k_1-1}(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \overline{\mathbf{V}}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\right)^{k_1-1}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \tag{5.7}$$

untuk $k_1 = 1,2,\cdots,m$.

Serupa juga, kita takrifkan

$$\mathbf{F}_2 = (s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-T}\mathbf{E}^T,\ \mathbf{G}_2 = (s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}\text{, dan } \overline{\mathbf{U}}_2^T = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-T}\overline{\mathbf{V}}^T(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^T\,.$$

Jika $\tilde{\mathbf{F}}_2 = \overline{\mathbf{U}}_2^T\,\mathbf{F}_2\overline{\mathbf{W}}$ dan $\tilde{\mathbf{G}}_2 = \overline{\mathbf{U}}_2^T\mathbf{G}_2$, maka

$$\tilde{\mathbf{F}}_2 = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-T}\tilde{\mathbf{E}}^T,\ \tilde{\mathbf{G}}_2 = \left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-T}\tilde{\mathbf{C}}^T\text{, dan } \overline{\mathbf{U}}_2^T\,\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{I}\,.$$

Dengan menggunakan Teorem 5.3, kita memperoleh

$$\left((s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-T}\mathbf{E}^T\right)^{k_2-1}\left((s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}\right) = \overline{\mathbf{W}}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-T}\tilde{\mathbf{E}}^T\right)^{k_2-1}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-T}\tilde{\mathbf{C}}^T\right)$$

atau

$$\mathbf{C}(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\left(\mathbf{E}(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\right)^{k_2-1} = \tilde{\mathbf{C}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{E}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\right)^{k_2-1}\overline{\mathbf{W}}^T \tag{5.8}$$

untuk $k_2 = 1,2,\cdots,m$.

Sekarang, kita akan buktikan bahawa $\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1}$ masih benar untuk $k = 1,2,3,\cdots,2m$. Secara remehnya, jelas daripada (5.7), kes $k = 1$ adalah benar kerana

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_0 &= \mathbf{C}(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\\ &= \mathbf{C}\left(\overline{\mathbf{V}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\right)\\ &= \tilde{\mathbf{C}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{0}\,.\end{aligned}$$

Untuk $k \geq 2$, kita boleh cari dua integer positif k_1 dan k_2 yang memenuhi

$$k_1,\ k_2 \le m \text{ and } k = k_1 + k_2 .$$

Oleh kerana

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}\left(\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{E}\right)^{k-1}\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} \\
&= \mathbf{C}\left(\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{E}\right)^{k_1+k_2-1}\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} \\
&= \left(\mathbf{C}\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{E}\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right)^{k_2-1}\right)\left(\mathbf{E}\left(\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{E}\right)^{k_1-1}\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\right).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

gantikan persamaan (5.7) dan (5.8) ke dalam (5.9), diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}\left(\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{E}\right)^{k-1}\left(s_0\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} \\
&\quad= \tilde{\mathbf{C}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{E}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\right)^{k_2-1}\overline{\mathbf{W}}^T\mathbf{E}\overline{\mathbf{V}}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\right)^{k_1-1}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \\
&\quad= \tilde{\mathbf{C}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{E}}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\right)^{k_2-1}\tilde{\mathbf{E}}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\right)^{k_1-1}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \\
&\quad= \tilde{\mathbf{C}}\left(\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\right)^{k-1}\left(s_0\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}
\end{aligned}$$

untuk $k = 2,3,4,\cdots,2m$. Dalam perkataan lain, kita telah dapat membuktikan bahawa $\mathbf{M}_{k-1} = \tilde{\mathbf{M}}_{k-1}$ untuk $k = 2,3,4,\cdots,2m$. Lengkaplah pembuktiannya.♦

6. Kesimpulan

Dalam makalah ini, kita telah mencadangkan pembuktian yang berbeza bagi teorem asas untuk pemadanan momen seperti yang tertulis dalam Teorem 5.3. Pembuktian Teorem 5.3, boleh dikerjakan dengan syarat sifat atau persamaan yang melibatkan subruang Krylov blok terpenuhi. Sifat atau persamaan yang dimaksudkan itu adalah persamaan (4.2). Dengan menggunakan algoritma Arnoldi blok, kita menjamin bahawa persamaan (4.2) sah berlaku.

Penghargaan

Alhamdulillah, makalah ini adalah hasil dari projek penyelidikan FRGS Universiti Malaysia Terengganu dan Kerajaan Malaysia dengan nombor peruntukan 59215. Dengan demikian berbanyak terima kasih diucapkan kepada pihak yang berkenaan.

Rujukan

[1] Aliaga, J.I., Boley, D.L., Freund, R.W., and Hernandez, V. *A Lanczos type method for multiple starting vectors*. Mathematics of Computation, 69 (1998), 1577 – 1601.

[2] Antoulas, A.C. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publisher, 2005.

[3] Freund, R.W. *Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 123 (2000), 395 – 421.

[4] Grimme, E.J. *Krylov projection methods for model reduction*, Thesis Doctoral, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997.

[5] Heres, P.J. *Robust and efficient Krylov subspace methods for model order reduction,* Thesis Doctoral, Technische Universiteit Eindhoven, 2005.

[6] Horn, R.A., and Johnson, C.R. *Matrix analysis,* Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[7] Ismail Mohd and Farikhin, *Some Properties of Krylov Subspace*. Paper presented at The 4th International Conference on Research and Education in Mathematics, Kuala Lumpur, 21-23 October 2009.

[8] Liu, W.Q., Sreeram, V., and Teo, K.L. *Model reduction for state-space symmetric systems*, System & Control Letters 34 (1998), 209 – 215.

[9] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear System*, Second edition, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publisher, 2003.

[10] De Villemagne,C., and Skelton, R.E. *Model Reduction Using A Projection Formulation*, International Journal of control, 46-6 (1987), 2141-2169.